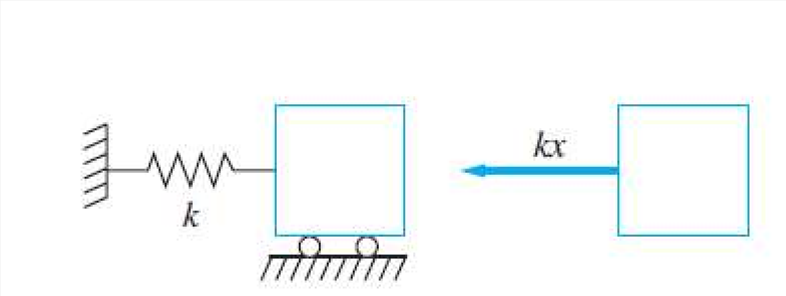
Drgania mechaniczne

Wiadomości wstępne

Układy drgające można podzielić na dwie grupy: układy ciągłe i układy dyskretne. Podział ten ma charakter matematyczny i uwzględnia metodykę badań.

Układ dyskretny można zdefiniować jako układ, którego ruch jest opisany równaniami różniczkowymi zwyczajnymi o skończonej liczbie niewiadomych funkcji jednej zmiennej, np. czasu. Mimo, że tego rodzaju układy są nierealne i nie występują w rzeczywistości, to jednak dla celów praktycznych wiele układów fizycznych można modelować układami dyskretnymi.

Wiadomości wstępne układ dyskretny



$$m\ddot{y} + ky = 0,$$

$$\ddot{y} + \alpha_0^2 y = 0,$$

$$\alpha_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Wiadomości wstępne

$$a = \frac{1}{2}(y_{max} - y_{min})$$

$$y(t) = y(t+T)$$

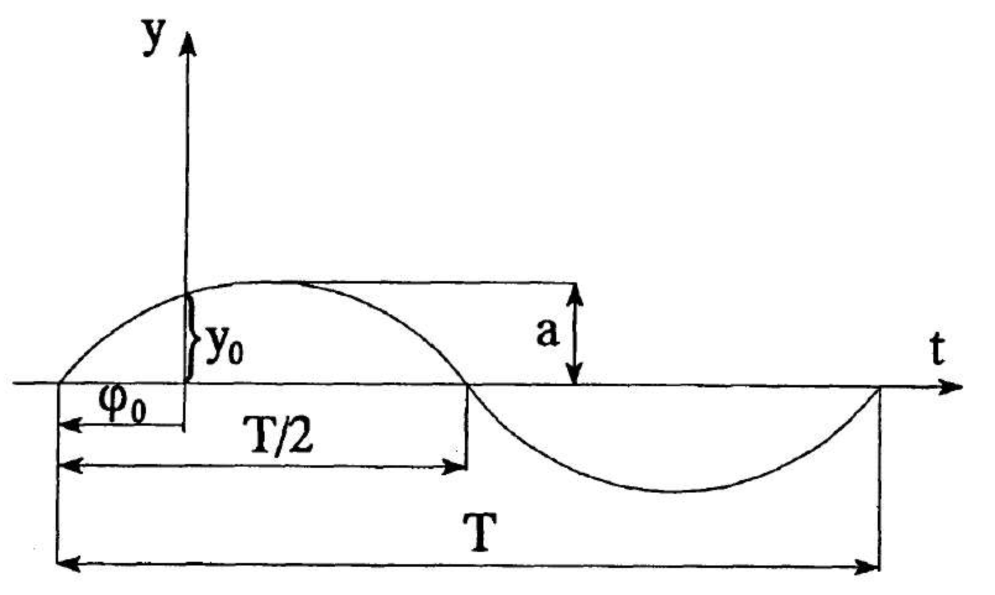
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f\ ,$$

Ruch harmoniczny

$$y(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t = a\cos(\omega t + \varphi_0)\ ,$$

$$a = \sqrt{A^2 + B^2}\ , \qquad \mathrm{tg}\,\varphi_0 = \frac{-B}{A}\ ,$$

$$A = a\cos\varphi_0\ , \qquad B = -a\sin\varphi_0\ .$$



Liniowe i nieliniowe układy dyskretne

1) do układów nieliniowych nie stosuje się zasada superpozycji skutków, szeroko wykorzystywana w teorii układów liniowych,

2) w układach nieliniowych amplitudy drgań zależą od częstości własnej, w związku z tym nie ma ostrego rezonansu, to znaczy drgania okresowe są zawsze o skończonej amplitudzie, nawet jeżeli pominiemy tłumienie,

3) w układach nieliniowych oprócz rezonansu podstawowego (jak w układach liniowych) mogą wystąpić rezonanse kombinowane: subharmoniczne, ultraharmoniczne lub subultraharmoniczne,

4) z równań ruchu układu nieliniowego można otrzymać rozwiązanie okresowe o tym samym okresie, dla tej samej częstości, a o różnych amplitudach,

5) stateczność układów liniowych nie zależy od warunków początkowych, natomiast w układach nieliniowych jedne rozwiązania mogą dążyć do nieskończoności, inne mogą być okresowe, a jeszcze inne – dążyć do zera,

6) w rzeczywistych układach liniowych zawsze występuje jedno położenie równowagi, natomiast w układach nieliniowych położeń równowagi może być dowolna ilość i mogą być różnie rozłożone.

Szkodliwe zjawiska drganiowe

1. **Zakłócenia prawidłowości działania maszyn.** Nadmierne drgania mogą spowodować wadliwą, a nawet niebezpieczną pracę maszyn i urządzeń. Jako przykłady można wymienić wiele maszyn roboczych: suwnice, żurawie montażowe i budowlane. Drgania liny i wysięgnika mogą powodować niepożądane ruchy elementu montowanego, utrudniając jego dopasowanie oraz przedłużając czas montażu. Drgania liny z kadzią odlewniczą mogą doprowadzić do niebezpiecznych wahań, które mogą spowodować wylanie się z kadzi płynnej stali i stać się zagrożeniem życia dla obsługi. Podobne zjawiska drgań mogą wystąpić przy wyciągach kopalnianych, utrudniając szybkie zatrzymanie się na odpowiednim poziomie. W obrabiarkach drgania utrudniają otrzymanie odpowiedniej gładkości. Drgania elementów mechanizmów mogą spowodować zakleszczenie się lub niepoprawne działanie. Drgania są przyczyną rozłączania się elementów złączonych, na przykład gwintowanych, zaciskowych itp.

Szkodliwe zjawiska drganiowe

2. **Z m n i e j s z e n i e   t r w a ł o ś c i   m a s z y n   i   u r z ą d z e ń.** Drgania są powodem powstawania zmiennych naprężeń w elementach maszyn. Doprowadzają one do zniszczeń o charakterze zmęczeniowym. Zniszczeniom takim ulegają przede wszystkim elementy mające kształt ułatwiający koncentrację naprężeń. Spotyka się na przykład zniszczenie zmęczeniowe będące skutkiem drgań wałów maszynowych, łopatek turbin itp. W szczególności spotyka się niszczenie elementów, które z samego przeznaczenia są poddane drganiom, np. resorów. Drgania mogą wpływać pośrednio na szybsze zużycie elementów, osiadanie fundamentów i podpór maszyn, co w pośrednim skutku doprowadza do niekorzystnych rozkładów obciążeń, mogących wywołać uszkodzenie lub zniszczenie albo zmniejszenie trwałości.

Szkodliwe zjawiska drganiowe

3. **Szkodliwy wpływ drgań na organizm człowieka.** Drgania maszyn mają szkodliwy wpływ na organizm człowieka. Występują one w szczególności w pojazdach, samolotach, oddziaływując poprzez elementy konstrukcji na załogę i pasażerów. Szkodliwe dla ludzi (choroba morska) są także drgania o niskich częstotliwościach, wywołane kołysaniem się okrętów. Podobne drgania mogą powstawać w maszynach roboczych, drgania kabin operatorów walcarek, żurawi itp. Drgania budowli wywołane pracą urządzeń mogą także oddziaływać szkodliwie na ludzi pracujących w danej budowli.

Osobnym złożonym problemem są drgania urządzeń udarowych młotków, wiertarek udarowych, młotków pneumatycznych itp. szkodliwie oddziaływujących na obsługę.

Szkodliwe zjawiska drganiowe

4. H a ł a s. Drgania wywołują hałas. Źródłem hałasu są zarówno drgania gazów jak i elementów mechanicznych. Istnieje wiele maszyn, urządzeń i pojazdów, które poprzez drgania wywołują hałasy szkodliwe dla zdrowia ludzkiego lub nieprzyjemne dla obsługi maszyn oraz dla otoczenia. Wystarczy wymienić niektóre z nich, jak stacje pomp i sprężarek, stacje dmuchaw na hutach, hale montażowe itp.

Idealizacja układów rzeczywistych

Przeprowadzając analizę teoretyczną jakiegokolwiek rzeczywistego układu fizycznego lub technicznego zawsze musimy go idealizować, pomijając szereg mniej ważnych drugorzędnych jego właściwości. Przy ustalaniu matematycznego modelu, opisującego procesy zachodzące w rozpatrywanym układzie rzeczywistym, należy zawsze wydzielić podstawowe parametry, które w danym przypadku mają decydujące znaczenie, i - oczywiście - nie należy uwzględniać szeregu pobocznych parametrów, które z reguły bardzo komplikują rozważany problem, chociaż nie mają istotnego znaczenia. Dlatego rzeczywisty układ jest zwykle zastępowany przy analizie teoretycznej pewnym układem wyidealizowanym, zwanym u k ł a d e m z a s t ę p c z y m.

Idealizacja układów rzeczywistych

W przypadku drgań mechanicznych układ zastępczy składa się z punktów materialnych i brył nieodkształconych, obarczonych pewnymi więzami sztywnymi i odkształcalnymi, których masę pomijamy, może także zawierać odkształcalne elementy o ciągłym rozkładzie masy. Zasadnicze uproszczenia, których dokonujemy przechodząc od rzeczywistego do zastępczego układu mechanicznego, dotyczą: liczby stopni swobody, zależności sił sprężystych od odkształceń, charakteru sił oporu oraz innych sił niezachowawczych, a także sposobu działania obciążeń zewnętrznych.

Zbudowanie układu zastępczego w konkretnym przypadku jakiejś konstrukcji wymaga dokładnego zanalizowania charakteru obciążeń odkształceń oraz sił wewnętrznych, działających w rozważanym układzie, a równocześnie gruntownej znajomości teorii drgań. Dlatego wskazówki dotyczące prawidłowego wyboru układów zastępczych wynikają z dalszego toku wykładu teorii drgań tłumionych, który podano w tej pracy.

Idealizacja układów rzeczywistych

1) układami dyskretnymi o skończonej liczbie stopni swobody lub ciągłymi o nieskończonej liczbie stopni swobody,

2) układami liniowymi lub nieliniowymi w zależności od tego, czy są opisane liniowymi czy nieliniowymi równaniami różniczkowymi.

Charakterystyki sprężyste i tłumienie

Charakterystyki sprężyste i tłumienia, występujące w maszynach i konstrukcjach, są z reguły nieliniowe. Na ich nieliniowość mają wpływ następujące czynniki:

1) tzw. czynniki typu "naturalnego", wynikające z konstrukcji i przeznaczenia maszyn, jak: tarcie suche, tarcie konstrukcyjne itp.,

2) tzw. czynniki "programowe", występujące na skutek odpowiedniego doboru sprężyn, stosowania luzów oraz stosowania nieliniowych amortyzatorów i tłumików.

Charakterystyki sprężyste i tłumienie

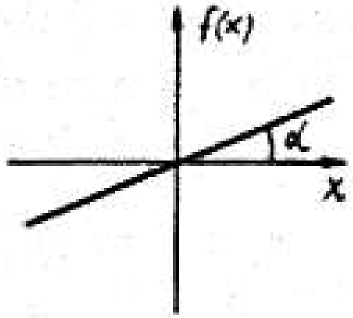
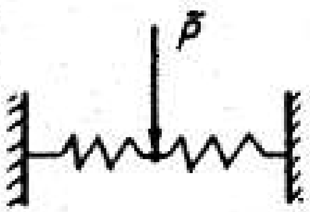
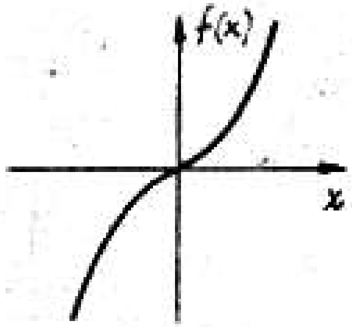
Większość nieliniowości, spotykanych w układach drgających, pochodzi od tłumienia i sił sprężystych. W wielu układach rzeczywistych tłumienie jest złożone i pochodzi od tarcia suchego, tarcia wiskotycznego, wewnętrznego i konstrukcyjnego. Człony sprężyste wykazują również zmienność współczynnika sprężystości w zależności od odkształceń. Wszystkie sprężyny są do pewnego stopnia nieliniowe. Oznacza to, że przy dużych odkształceniach siła sprężystości występująca w sprężynie nie jest wprost proporcjonalna do odkształcenia.

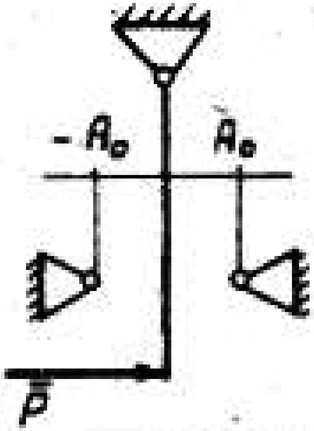
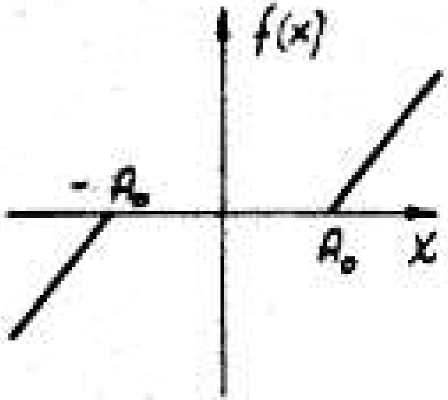
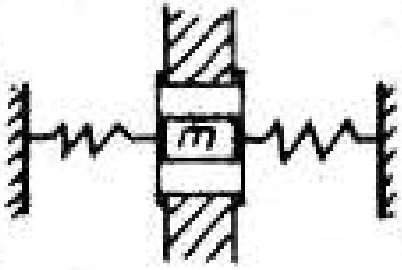
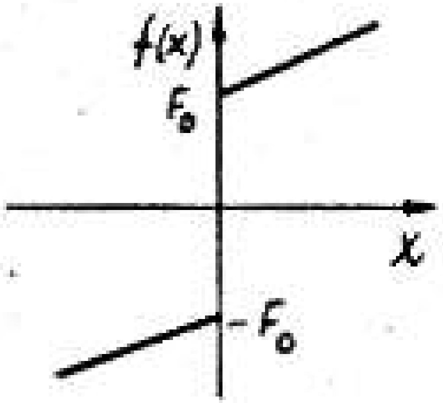
Ograniczając się do małych ugięć elementów sprężystych pomija się nieliniowości, przyjmując charakterystykę sprężystą jako liniową. Natomiast przy dużych ugięciach w praktyce zastępuje się charakterystykę nieliniową zlinearyzowaną charakterystyką o średnim (zastępczym) współczynniku sprężystości.

Charakterystyki sprężyste i tłumienie

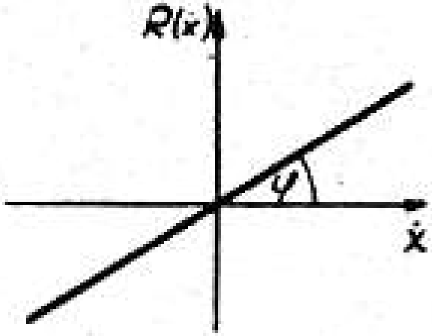
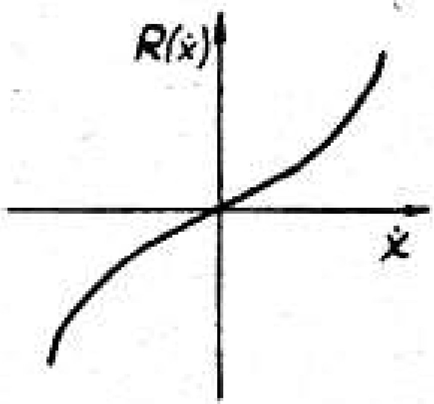
W przypadku układów sprężystych z tworzyw sztucznych lub układów, w których występują luzy, nie można pominąć nieliniowości, ponieważ prowadzi to do poważnych błędów. W wielu przypadkach można zaobserwować wpływ nieliniowości sprężyn na zachowanie się układu. Przykłady charakterystyk sprężystych i charakterystyk tłumienia oraz ich analityczny opis pokazano w tablicach 1.1 i 1.2.

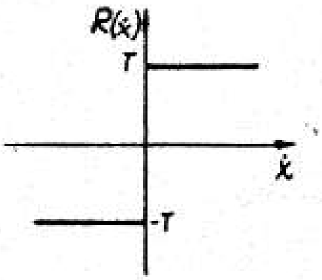
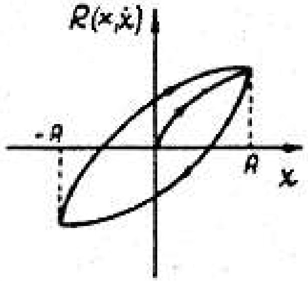
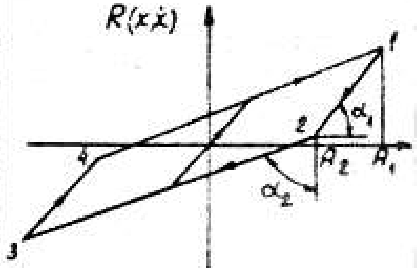
Charakterystyki sprężyste

L.p	Typ sprężystego elementu	Postać charakteryst. sprężystej	Analityczny opis charakterystyki
1.			$f(x) = kx$ $k = tg\alpha$
2.			$f(x) = kx^n$

3.			$f(x) = k(x + A_0)$ przy $x < -A_0$ $f(x) = 0$ przy $-A_0 \leq x \leq A_0$ $f(x) = k(x - A_0)$ przy $x > A_0$
4.			$f(x) = kx + F_0$ przy $x > 0$ $f(x) = kx - F_0$ przy $x < 0$

Charakterystyki tłumienia

Typ tarcia	Postać charakterystyki tarciowej (sprężysto-tarciowej)	Analityczny opis charakterystyki
Wiskotyczne liniowe		$R = \alpha \dot{x}$ $tg\varphi = \alpha$
Proporcjonalne do n-tej potęgi prędkości		$R = \alpha \cdot \dot{x} \lvert \dot{x} \rvert^{n-1}$

Suche		$R = T \, sign \, \dot{x}$
Wewnętrzne		$R = kx \pm \frac{\alpha_1}{\pi} A^n \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \, sign \, \dot{x}$
Konstrukcyjne		$R = k_1 x + [-A_1(k_1 - k_2) + T] \, sign \, \dot{x}$ $R = k_2 x + T \, sign \, \dot{x}$ $tg \alpha_1 = k_1$ $tg \alpha_2 = k_2$

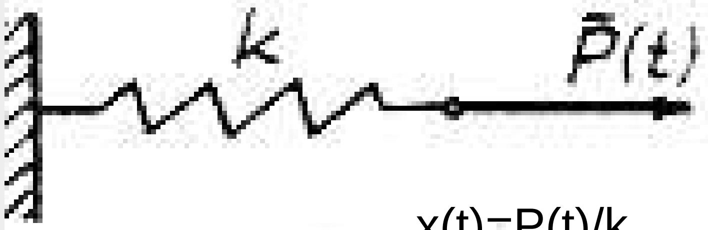
Stopnie swobody układu mechanicznego

Trudności w badaniu drgań układów mechanicznych w znacznej mierze zależą od liczby stopni swobody. Liczbą stopni swobody układu mechanicznego nazywamy liczbę niezależnych współrzędnych, jednoznacznie określających położenie wszystkich punktów materialnych układu. W układach mechanicznych, w szczególności w zagadnieniach drganiowych, położenia punktów układu zmieniają się z upływem czasu, czyli współrzędne te są funkcjami czasu.

Stopnie swobody układu mechanicznego

Dowolny układ mechaniczny posiada nieskończenie wiele punktów materialnych, a w związku z tym nieskończoną liczbę stopni swobody. Przy rozwiązywaniu zagadnień praktycznych wygodnie jest posługiwać się uproszczonymi układami, które charakteryzują się skończoną liczbą stopni swobody. W takich uproszczonych układach obliczeniowych niektóre elementy (najlżejsze) przyjmuje się jako bezmasowe odkształcalne więzy, elementy, którym przypisujemy masę, przyjmujemy jako punkty materialne lub bryły sztywne.

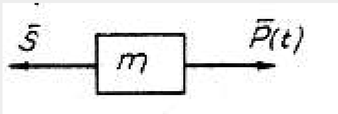
Prosty przykład

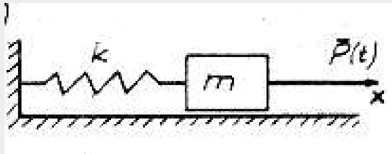


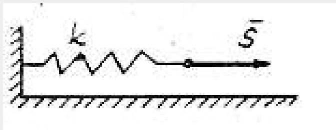
$x(t)=P(t)/k$

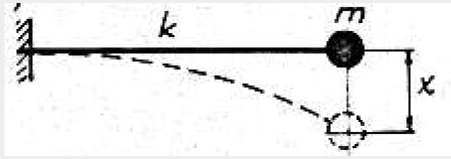
Takie przedstawienie zagadnienia nie jest dynamiczne, chociaż znalezione przemieszczenie jest funkcją czasu. Dynamika procesów w rzeczywistych układach mechanicznych jest związana z własnością bezwładności w tej lub innej postaci, co musi być ujęte w modelu obliczeniowym.

Układ o jednym stopniu swobody







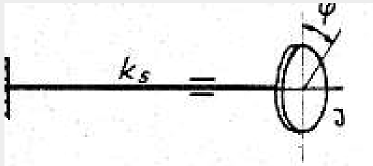


Równanie różniczkowe ruchu drgającego

$$P + S = m\ddot{x}$$

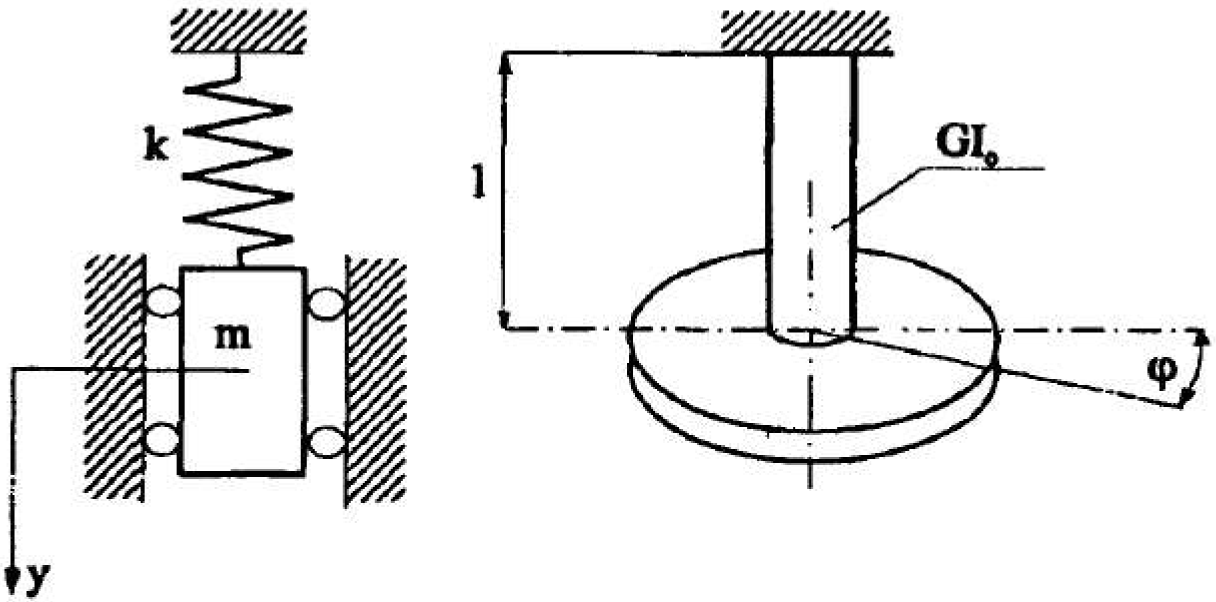
gdzie

$$S = -kx$$



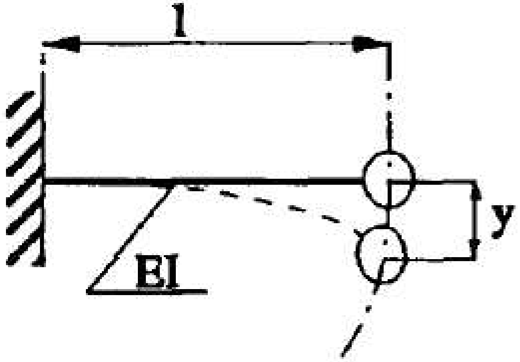
$$m\ddot{x} + kx = P(t)$$

Układy o jednym stopniu swobody



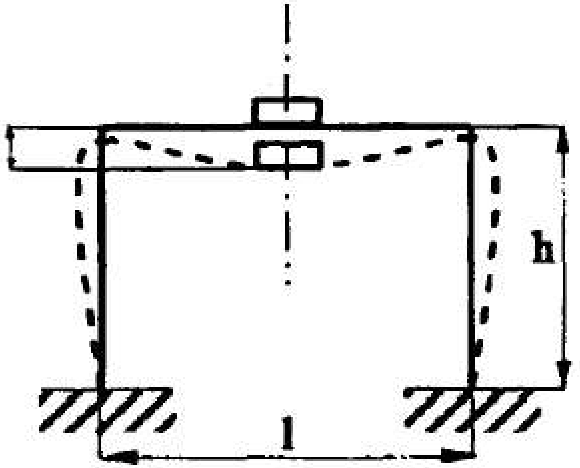
a) b)

$$k = \frac{Gd^4}{8D^3n},$$



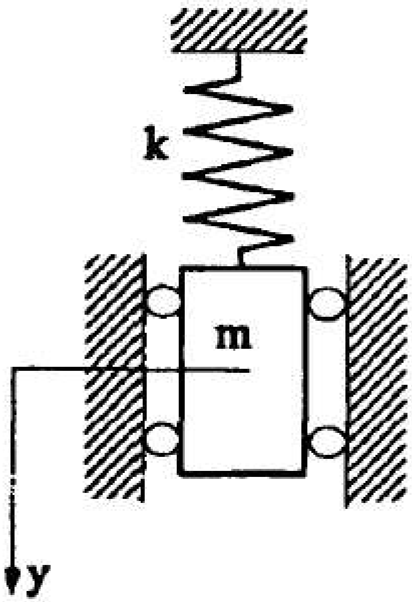
$$k = \frac{3EI}{l^3},$$

a)



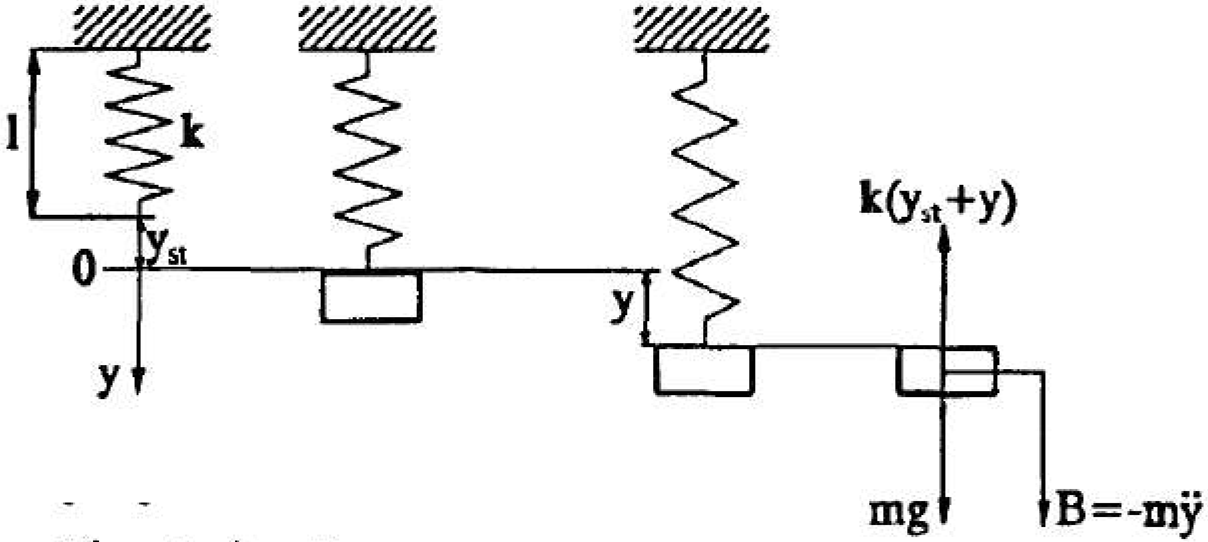
b)

$$k = \frac{96EI}{l^3} + \frac{2l + h}{2h + l},$$



Ugięcie statyczne $y_{st} = \frac{mg}{k}.$

Wychylenie z położeni a równowagi



Równanie równowagi:

$$-m\ddot{y} + mg - k(y_{st} + y) = 0,$$

$$m\ddot{y} + ky = 0,$$

lub

$$\ddot{y} + \alpha_0^2 y = 0,$$

Częstość drgań własnych $\alpha_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$

$\ddot{y} + \alpha_0^2 y = 0,$ ma rozwiązanie $y = e^{rt},$

$$y_1 = \frac{e^{i\alpha_0 t} + e^{-i\alpha_0 t}}{2} = \cos\alpha_0 t,$$
$$y_2 = \frac{e^{i\alpha_0 t} - e^{-i\alpha_0 t}}{2} = \sin\alpha_0 t.$$

Rozwiązanie ogólne przyjmuje postać $y = A\cos\alpha_0 t + B\sin\alpha_0 t,$

lub $y = a\cos(\alpha_0 t - \beta),$ gdzie

$$a = \sqrt{A^2 + B^2}, \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{B}{A}.$$

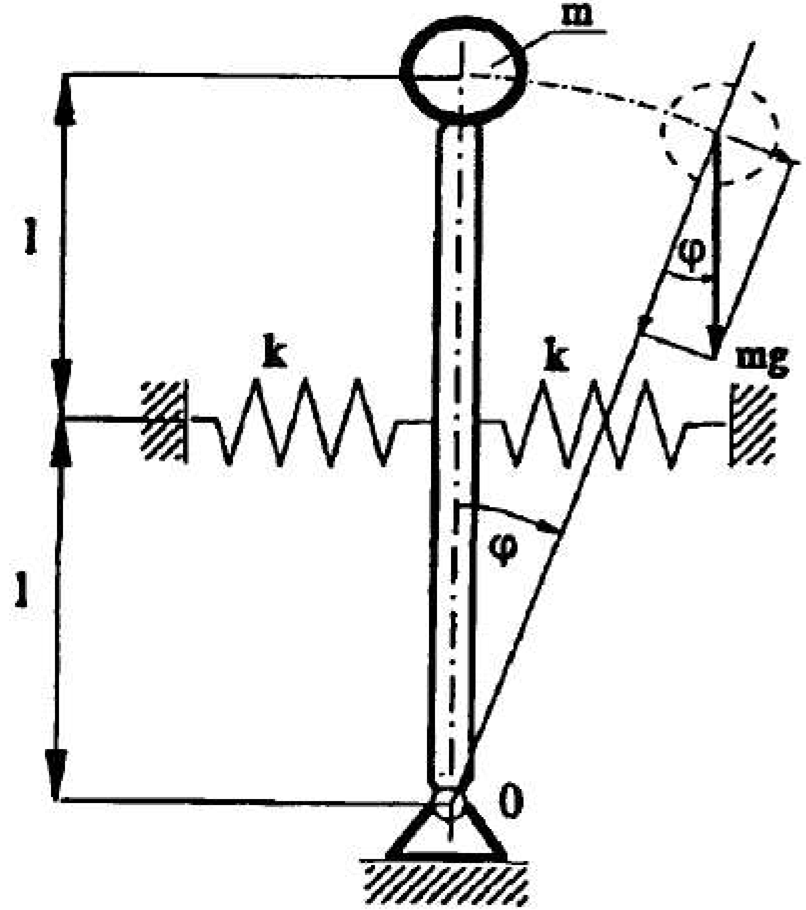
Okres drgań $T = \dfrac{2\pi}{\alpha_0}.$

przykład

Dla układu przedstawionego na rys. określić częstość małych drgań własnych wokół pionowego położenia równowagi. Przyjąć, że pręt jest sztywny i bez masowy. Przedstawić wykreślnie ruch harmoniczny przy warunkach początkowych

$\varphi(t_0) = \phi_0,\ \dot{\varphi}(t_0) = \dot{\phi}_1.$

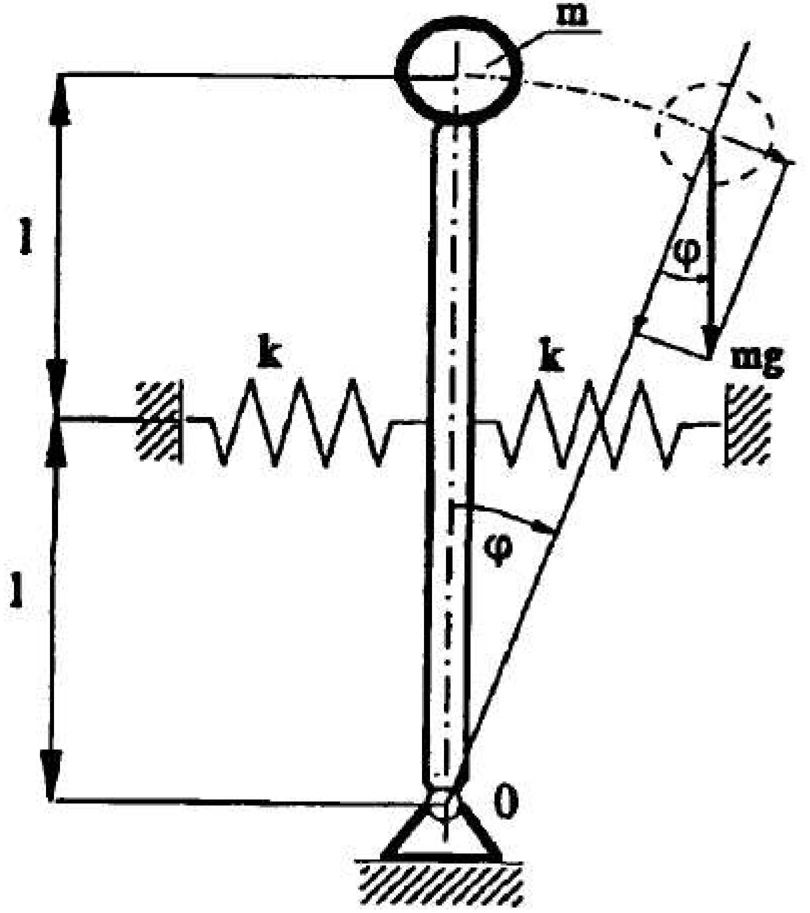
$k = 2000\ \mathrm{N/m},\ l = 0.5\ \mathrm{m},\ m = 20\ \mathrm{kg}.$



przykład

$\varphi(t_0) = \phi_0,\ \dot\varphi(t_0) = \dot\phi_1$

$k = 2000$ N/ m, $l = 0.5$ m, $m = 20$ kg.



$$B\ddot\varphi = -2kl^2\varphi + 2lmg\varphi,$$

gdzie masowy moment bezwładności

$$B = m(2l)^2 = 4ml^2.$$

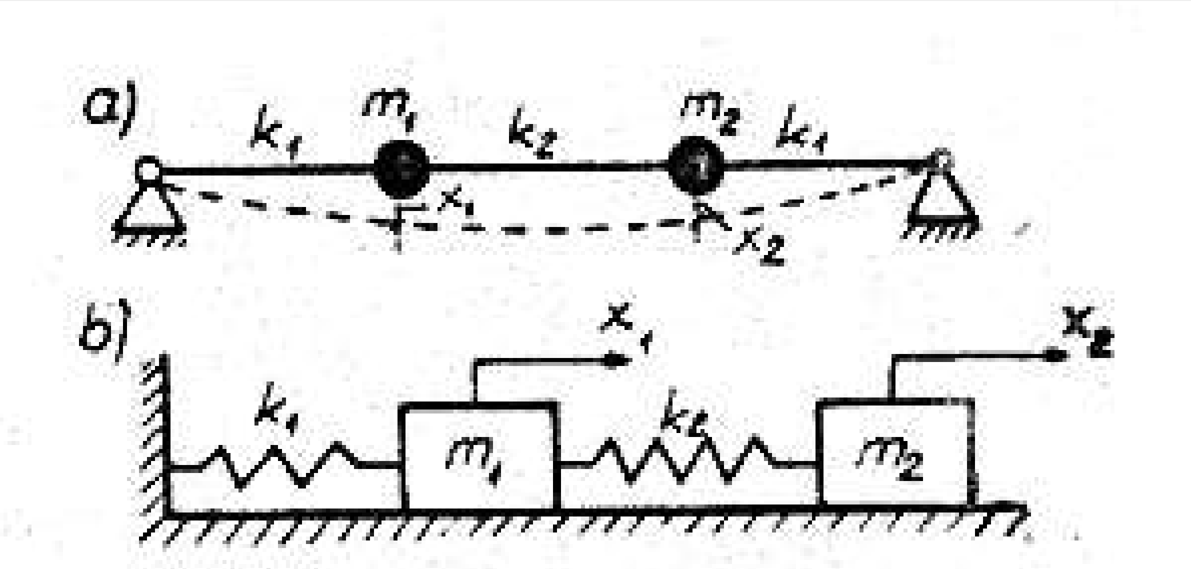
Wobec tego otrzymujemy

$$\ddot\varphi + \frac{2kl^2 - 2mgl}{4ml^2}\varphi = 0,$$

i częstość drgań własnych wynosi

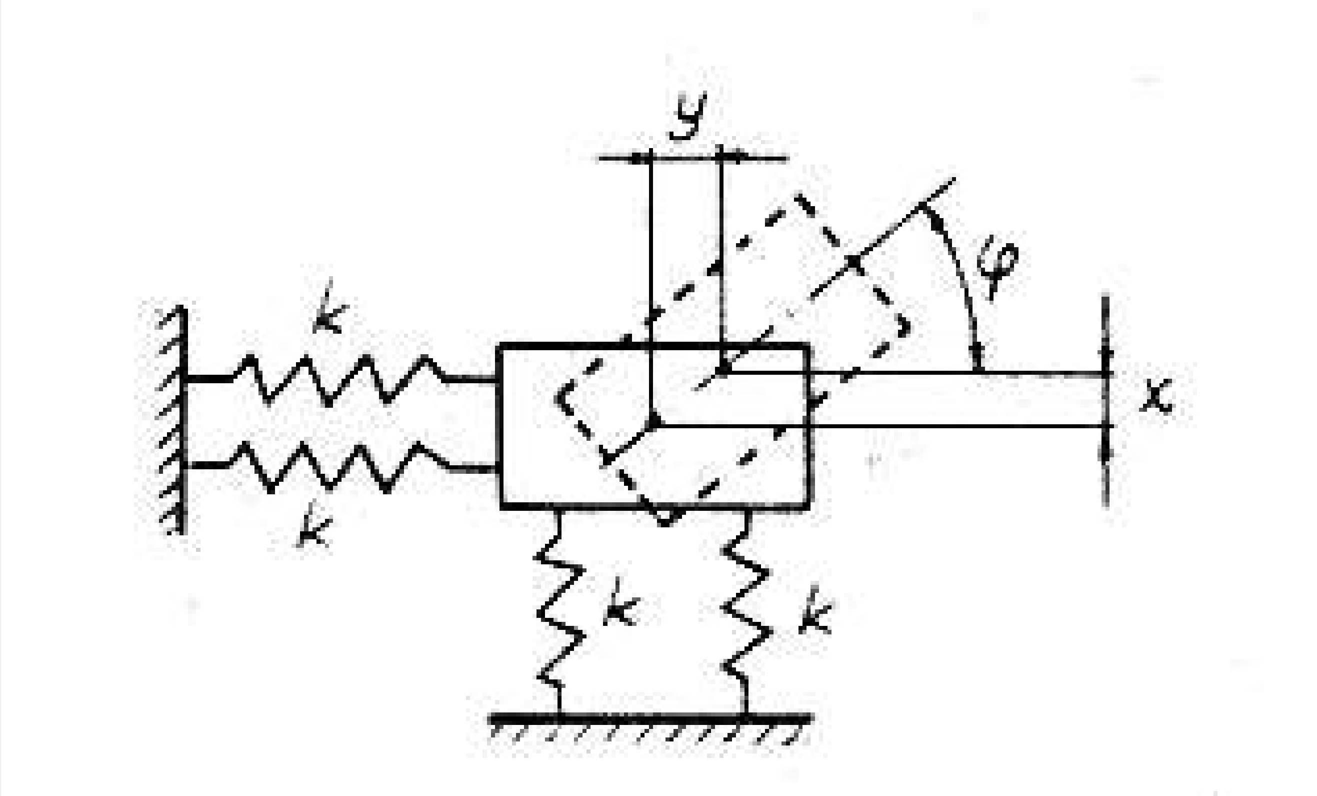
$$\alpha_0 = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{k}{m} - \frac{g}{l}\right)} = 6.34\frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Układ o dwóch stopniach swobody



$$x_1 = x_1(t), \qquad x_2 = x_2(t)$$

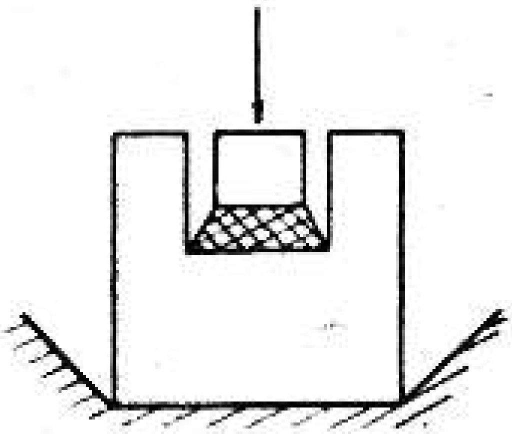
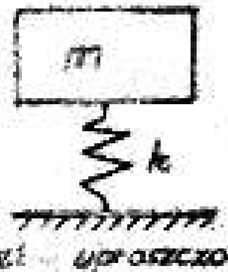
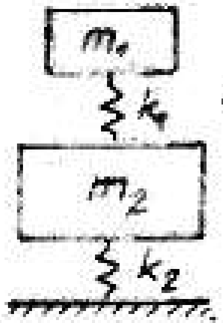
Układ o trzech stopniach swobody



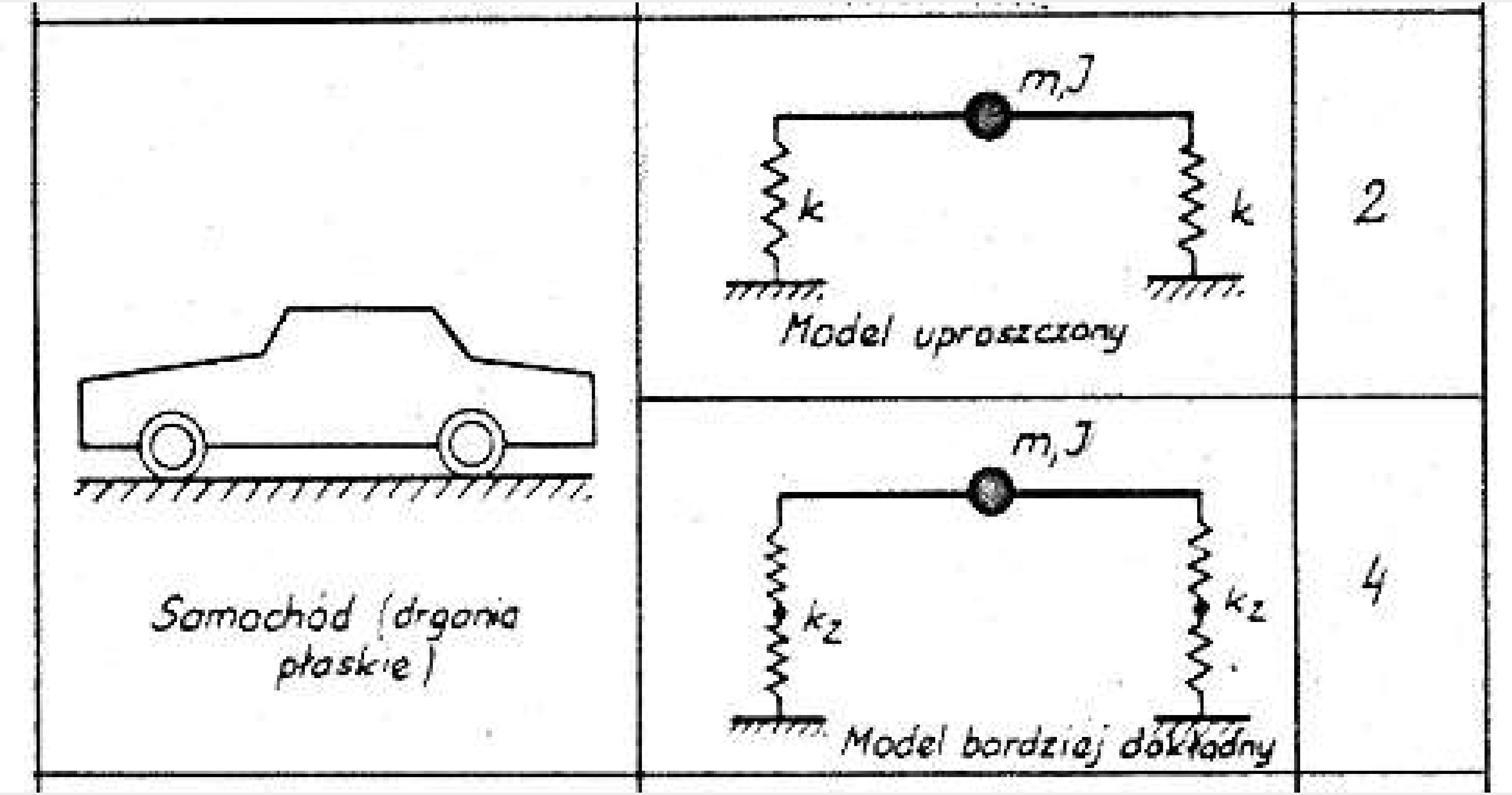
$x = x(t)$, $y = y(t)$, $\varphi = \varphi(t)$

Schematy układów i ich modele

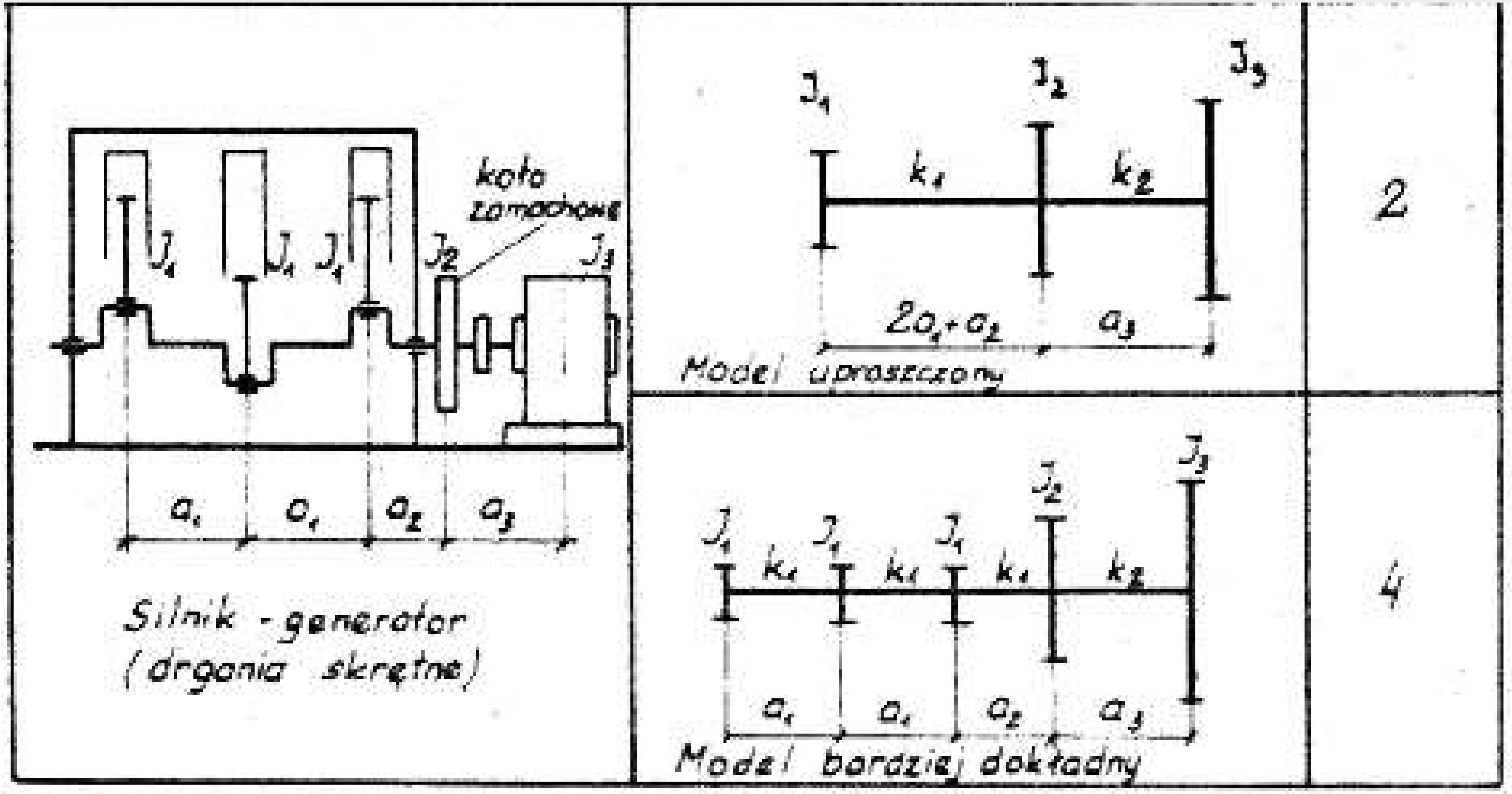
Schematy układów mechanicznych i ich modele dyskretne

Zadany układ mechaniczny	Układ obliczeniowy	Ilość stopni swobody
 Młot kuźniczy (drgania wzdłużne)	 Model uproszczony	1
	 Model bardziej dokładny	2

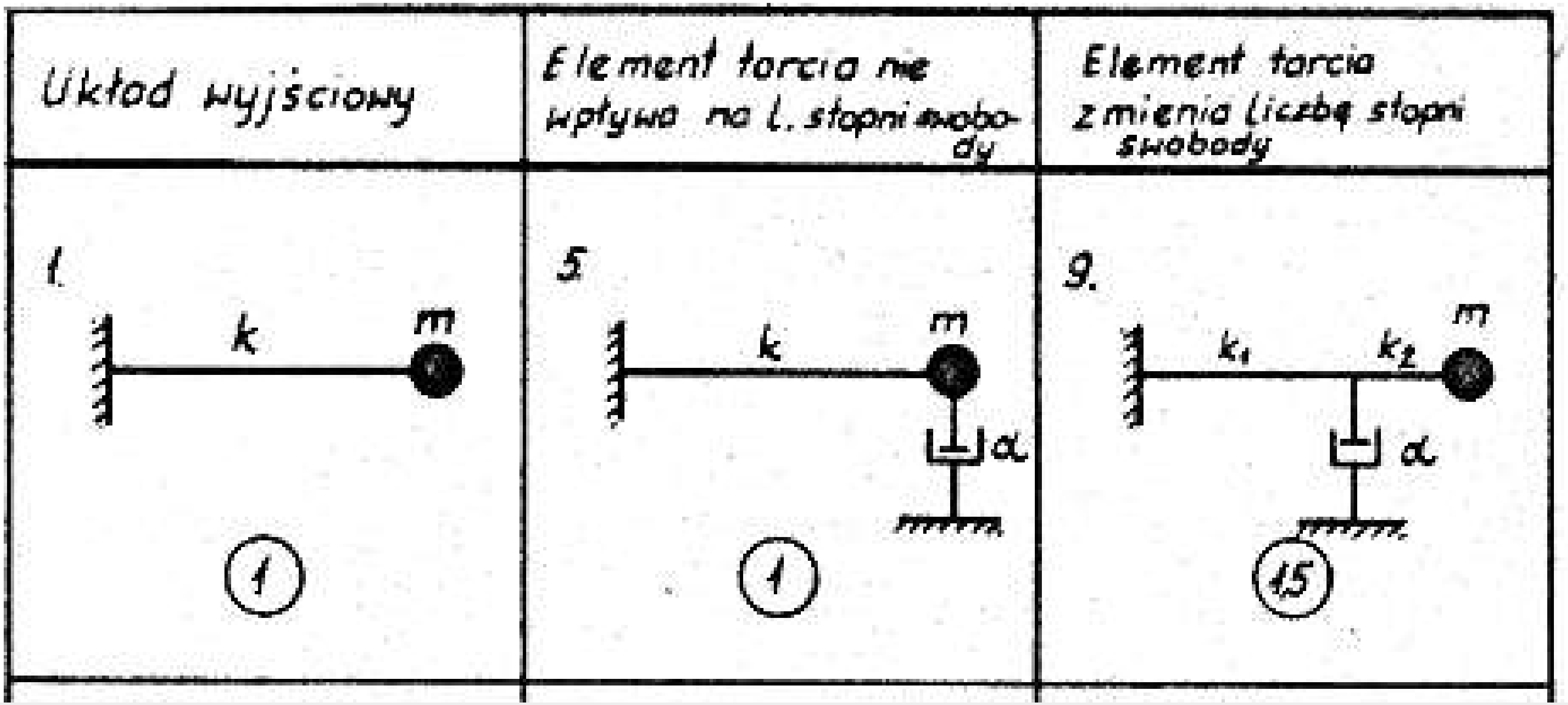
Schematy układów i ich modele



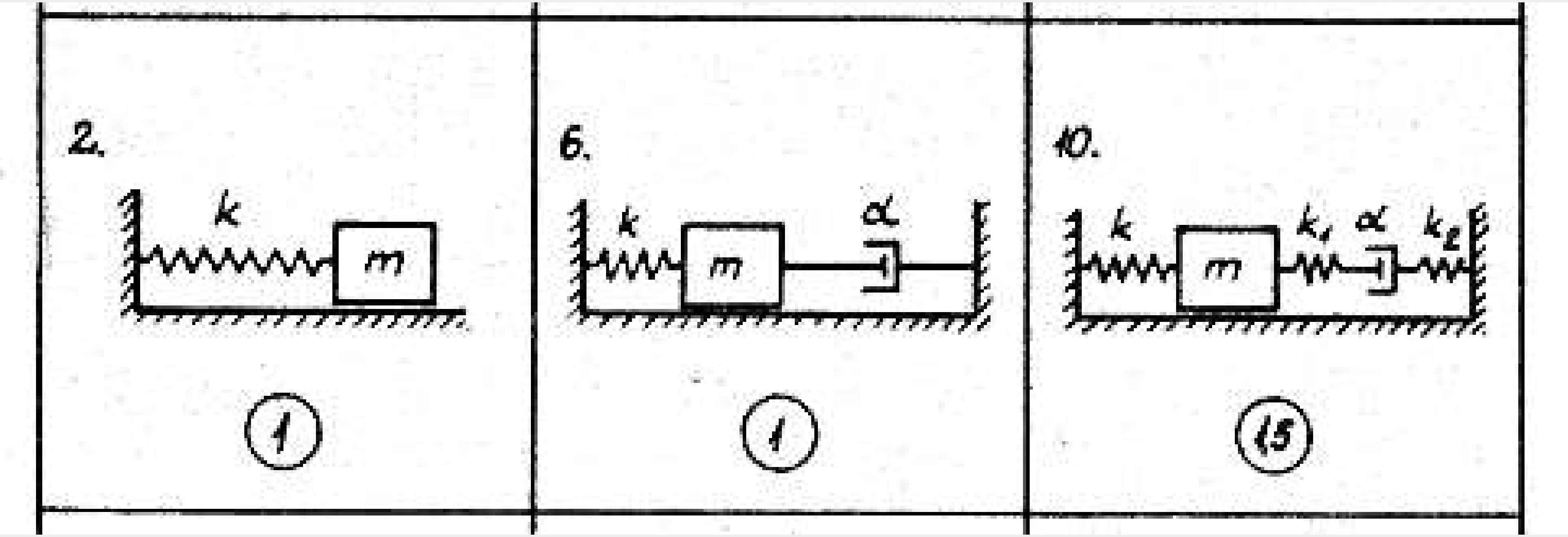
Schematy układów i ich modele



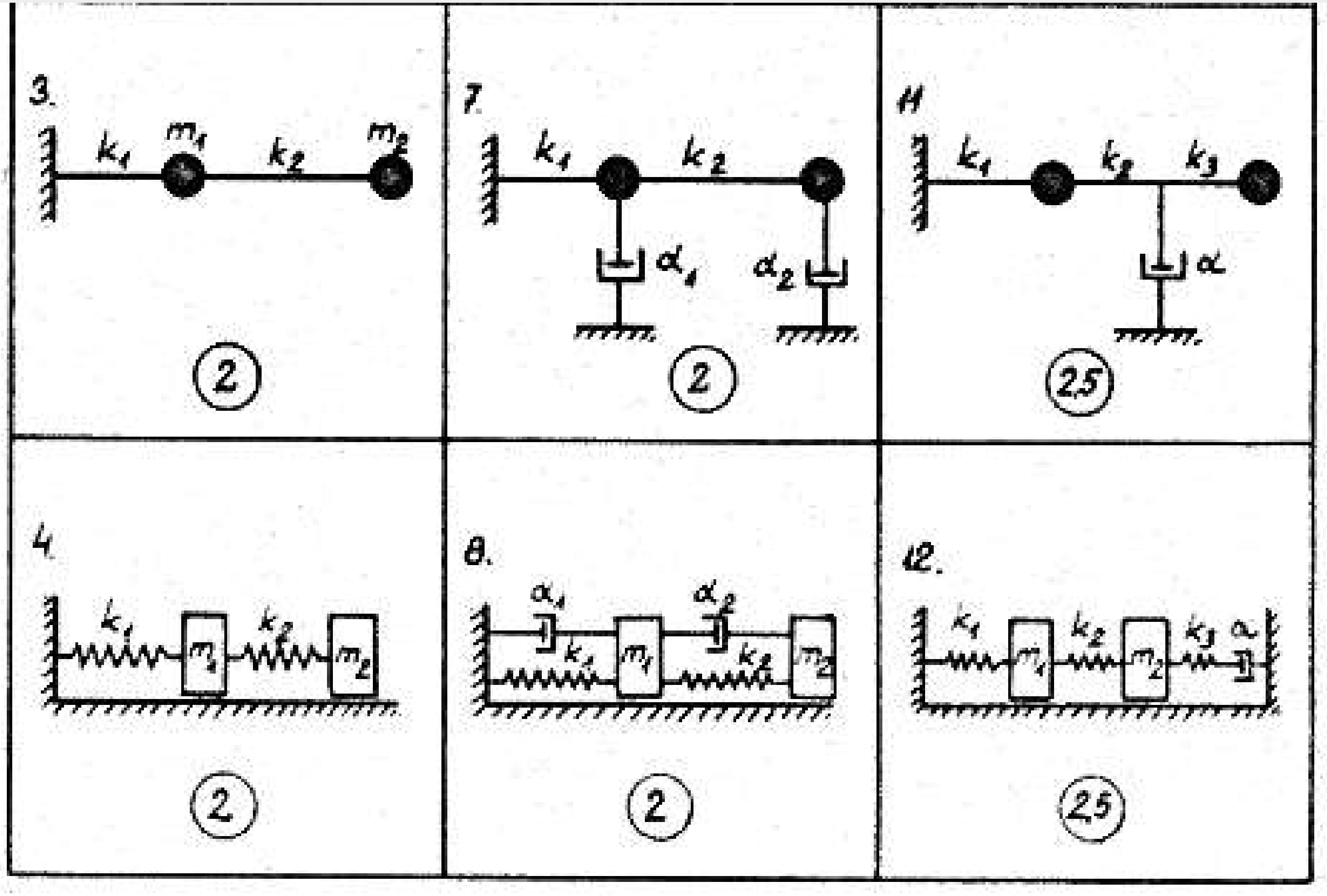
Modele dyskretne



Modele dyskretne



Modele dyskretne



1. Drgania swobodne – pojawiają się tylko w układach autonomicznych. Zachodzą one bez udziału zewnętrznego źródła energii i zewnętrznego wymuszenia i generowane są poprzez warunki początkowe.

2. Drgania wymuszone – zachodzą w układach nieautonomicznych ze zmiennym w czasie wymuszeniem zewnętrznym.

3. Drgania parametryczne – zachodzą tylko w układach niestacjonarnych i są wynikiem zmian w czasie parametrów układu

4. Drgania samowzbudne – dopływ energii do układu drgającego jest regulowany poprzez drgania i pochodzi od układu niedrgającego. Pojawiają się one w układach niezachowawczych.

1. Drgania okresowe – charakteryzują się dokładną powtarzalnością ruchu i są najczęsciej spotykane i najbardziej zbadane. Mogą występować w liniowych i nieliniowych układach, w układach stacjonarnych i niestacjonarnych, w układach niezachowawczych (samowzbudnych) i w układach nieautonomicznych.

2. Drgania quasi-okresowe – charakteryzują się prawie powtarzalnością i ich pojawienie się związane jest z istnieniem co najmniej dwóch niewspółmiernych częstości. Najczęściej spotykane są w układach nieautonomicznych, lub autonomicznych o co najmniej dwóch stopniach swobody zarówno w układach liniowych jak i nieliniowych.

3. Drgania chaotyczne – charakteryzują się nieregularnością i niepowtarzalnością ruchu. Pojawiają się już w układach nieliniowych nieautonomicznych o jednym stopniu swobody lub w układach autonomicznych nieliniowych opisanych przez co najmniej układ trzech równań różniczkowych pierwszego rzędu.

Przykład wahadło sferyczne

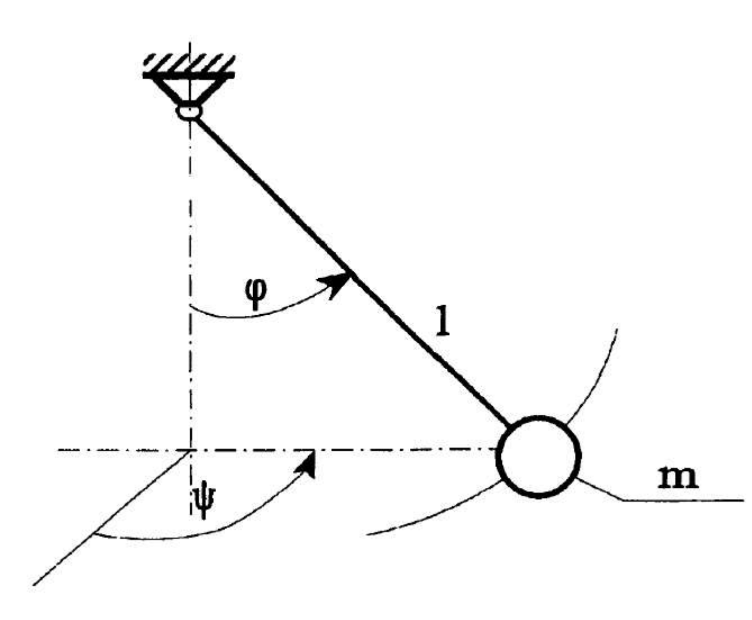
Współrzędne uogólnione to φ i ψ.

$$T = \frac{1}{2}m[(l\dot{\varphi})^2 + (l\dot{\psi}\sin\varphi)^2] ,$$
$$V = mgl(1-\cos\varphi) .$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \qquad j = 1,2,\ldots,n ,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi}, \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = ml^2\sin^2\varphi\dot{\psi} ,$$
$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = ml^2\dot{\psi}^2\sin\varphi\cos\varphi - mgl\sin\varphi, \qquad \frac{\partial L}{\partial \psi} = 0 ,$$

$$ml^2\ddot{\varphi} + mgl\sin\varphi - \frac{1}{2}ml^2\dot{\psi}^2\sin 2\varphi = 0 ,$$
$$ml^2\sin^2\varphi\ddot{\psi} = 0 .$$



$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi - \frac{1}{2}\dot{\psi}^2\sin 2\varphi = 0 ,$$
$$\dot{\psi}\sin^2\varphi = C ,$$