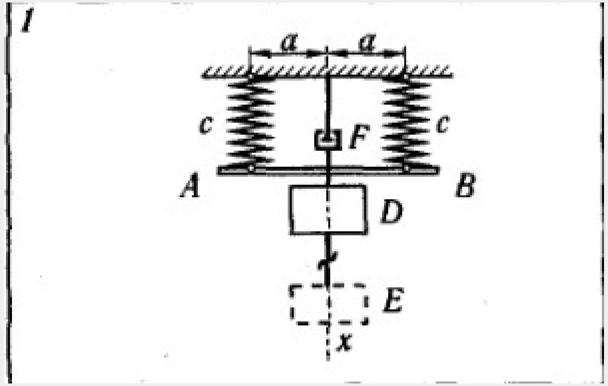
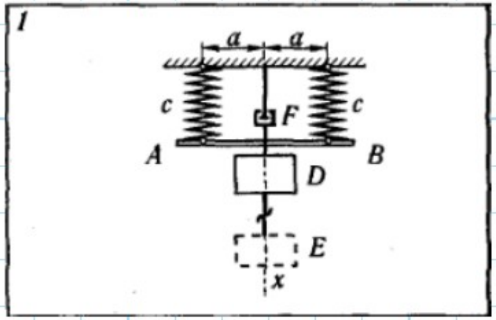
Drgania mechaniczne 26.03.21

Znaleźć równanie ruchu ciężaru D o masie m_D (warianty 2 i 4) lub układu ciężarów D i E o masach m_D i m_E (warianty 1, 3, 5), odnosząc ich ruch do osi Ox. Początek układu przyjąć w położeniu spoczynku ciężaru D lub odpowiednio układu ciężarów D i E (przy statycznym ugięciu sprężyn). Pręt łączący ciężary uważać za nieważki i nieodkształcalny.

Ciężar D (m_D = 2 kg) jest zamocowany do belki AB podwieszonej na dwóch jednakowych, równoległych sprężynach o sztywności c = 3N/cm każda. Punkt zamocowania ciężaru D znajduje się w jednakowych odległościach od osi sprężyn. W pewnej chwili do ciężaru D zostaje podwieszony ciężar E (m_E = 1kg). Opór ruchu układu dwóch ciężarów jest proporcjonalny do prędkości R = 12 v (w N), przy czym v jest prędkością wyrażoną w m/s.

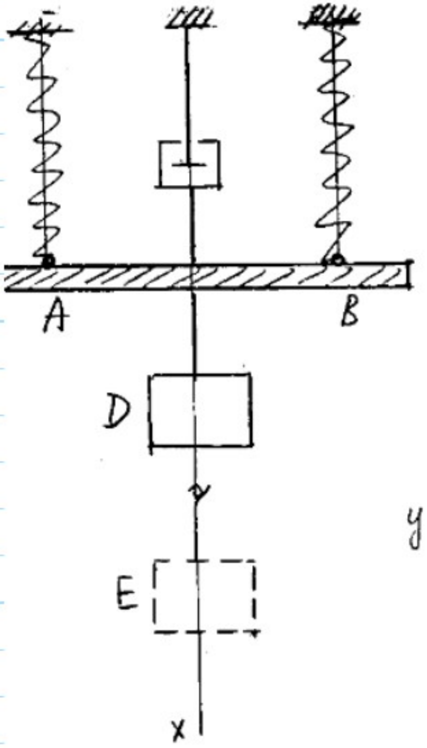
Masę belki AB i masę części tłumika przymocowanego do belki pominąć.





znaleźć równanie ruchu ciężaru D.
mD=2kg, c=3/N/cm, mE=1kg , R=12 v N,
gdzie v prędkośc wyrażona w m/s.
Cężar E jest w pewnej chwili doczepiny do ciężaru D

Rówanie ruchu



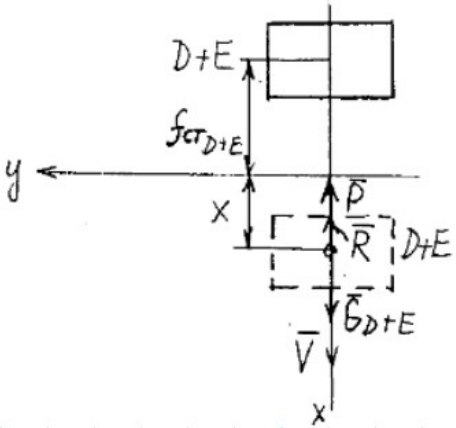
$$(m_D + m_E)\ddot{x} = \Sigma X_i$$

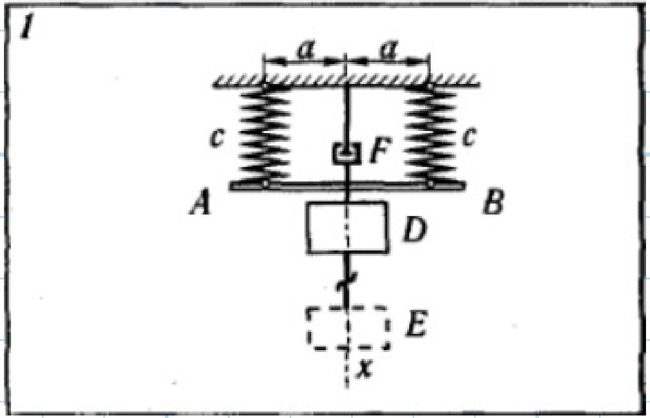
$$(m_D + m_E)\ddot{x} = G_{D+E} - P - R$$

siła ciężkości $G_{D+E} = (m_D + m_E)g$

siła w sprężynie $P = C_\Sigma(x + f_{m_{D+E}})$

siłą oporu (tłumienia) $R = 12 \cdot V$





Ekwiwalentna stała układu sprężyn

$$C_\Sigma = C + C = 2C = 2 \cdot 3 = 6 \ \frac{H}{CM}$$

równaie ruchu układu mas DE

$$\ddot{x} = g - \frac{C_\Sigma}{m}(x + f_{cm_{D+E}}) - 12 \cdot V, \quad m = m_D + m_E = 2 + 1 = 3$$

zakładając że siła w sprężynie równoważąca statyczne wydłużenie jest dana z równania

$$mg = c f_{cm_{D+E}}$$

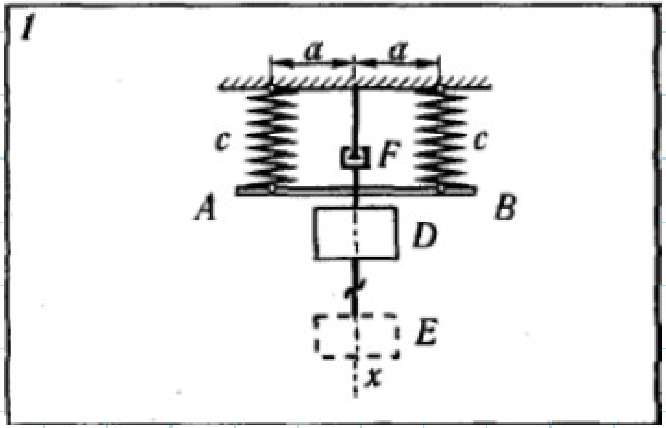
$$\ddot{x} = -C_\Sigma \frac{x}{m} - 12V$$

$$\ddot{x} + \frac{12}{3} \cdot \dot{x} + \frac{6}{3} \cdot x = 0$$

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 2x = 0$$

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0$$

$$n = 2 \qquad k = \sqrt{2}$$



rozwiązanie analityczne

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 2x = 0$$

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0$$

zakładamy

$$n > k: \quad x = C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt}$$

rozwiązujemy równanie charakterystyczne

$$k_1 = -n - \sqrt{n^2 - k^2} = -2 - \sqrt{2^2 - 2} = -3{,}414\ 1/c$$

$$k_2 = -n + \sqrt{n^2 - k^2} = -2 + \sqrt{2^2 - 2} = -0{,}586\ 1/c$$

$$x = C_1 e^{-3{,}414t} + C_2 e^{-0{,}586t}$$

$$\dot{x} = -3{,}414 \cdot C_1 e^{-3{,}414t} - 0{,}586\, C_2 e^{-0{,}586t}$$

okreslamy stałe C_1 C_2:

z warunków początkowych

$$t = 0: \quad x_0 = -f_{cm_E} \qquad f_{cm_E} = \frac{m_E g}{C_5} = \frac{1 \cdot 9{,}8}{600} = 0{,}0163\,м$$

$$C_1 + C_2 = 0{,}0163\,м$$

$$\dot{x}_0 = 0 \qquad -3{,}414 C_1 - 0{,}586 C_2 = 0$$

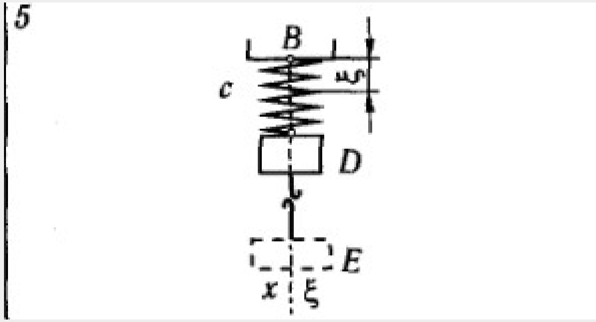
$$-3{,}414(0{,}0163 - C_2) - 0{,}586 C_2 = 0. \qquad C_2 = \frac{0{,}0557}{2{,}828} = 0{,}0197\,м$$

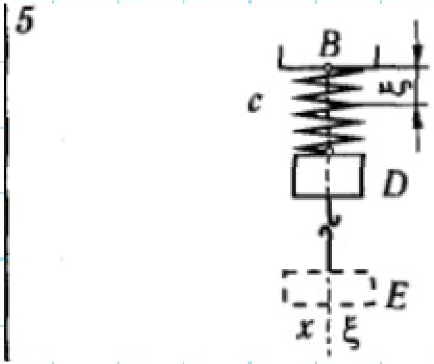
$$C_1 = 0{,}0163 - 0{,}0197 = -0{,}0034\,м$$

$$x = -0{,}0034 \cdot e^{-3{,}414t} + 0{,}0197 e^{-0{,}586t} \ (м) -$$

Do ciężaru D ($m_D = 1{,}6$ kg) wiszącego na sprężynie o sztywności $c = 4$ N/cm podwieszono ciężar E ($m_E = 2{,}4$ kg). Punkt B (górny koniec sprężyny) zaczyna wykonywać ruch według prawa $\xi = 2 \sin 5t$ (w cm) (oś skierowana jest pionowo w dół).

__Uwaga.__ Położenie początkowe punktu na osi x odpowiada średniemu położeniu punktu B ($\xi = 0$).





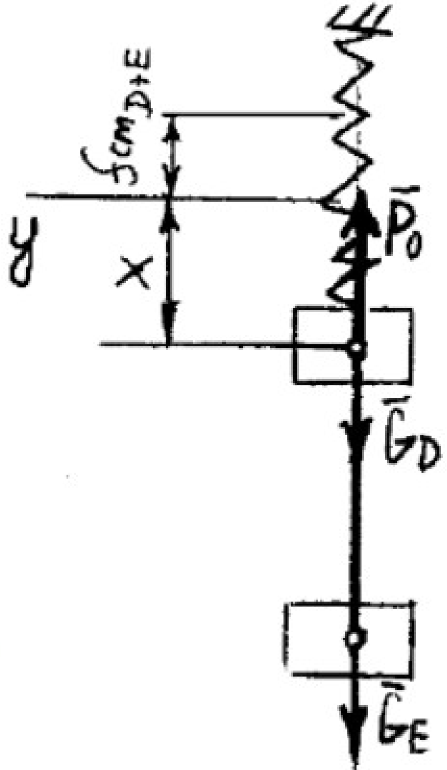
$m_D = 1{,}6\,kg \qquad m_E = 2{,}4\,kg$

$c = 4\,N/cm \qquad \xi = 2\cdot\sin 5t$

$$(m_D + m_E)\ddot{x} = \sum X_i$$

$$m = m_D + m_E = 1{,}6 + 2{,}4 = 4\,kg$$

$$m\ddot{x} = G - P$$



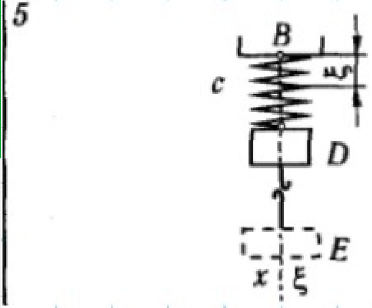
$G = mg$ siła ciężkosci

$P = c(x + f_{cm_{D+E}} - \xi)$ sila sprężystości

statyczna deformacja sprężyny

$$c\cdot f_{cm_{D+E}} = mg \qquad \sum X_i = 0: \quad G - P_0 = 0$$

$$f_{cm_{D+E}} = \frac{mg}{c} = \frac{4\cdot 9{,}8}{400} = 0{,}098\,m$$



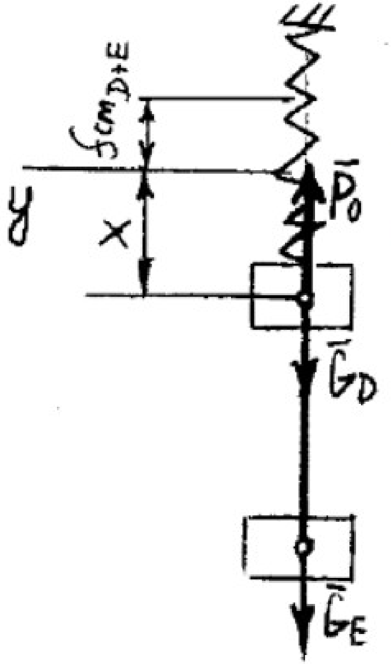
Rownanie dynamiki

$$m\ddot{x} = mg - c(x + f_{CT_{D+E}} - \xi)$$

$$m\ddot{x} = mg - cx - cf_{cm_{D+E}} + c\xi$$

$$m\ddot{x} = -cx + c\xi$$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}x = \frac{c}{m}\xi \qquad \xi = d \cdot \sin pt$$



rozwiązanie

$$x = x_1 + x_2$$

$$x_1 = C_1 \cdot \cos kt + C_2 \sin kt, \qquad k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{400}{4}} = 10 \text{ rad/s}$$

$$x_2 = \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt, \qquad \frac{h}{k^2 - p^2} = \frac{dc/m}{k^2 - p^2} = \frac{2 \cdot 400/4}{10^2 - 5^2} = 2{,}667 \text{ m}$$

$$x_1 = C_1 \cdot \cos 10t + C_2 \sin 10t + 2{,}6667 \sin 5t$$

$$\underline{t = 0}: \quad x_0 = -f_{cm_D} \qquad f_{cm_D} = \frac{m_E g}{c} = \frac{2{,}4 \cdot 9{,}8}{400} = 0{,}0588 \text{ m}$$

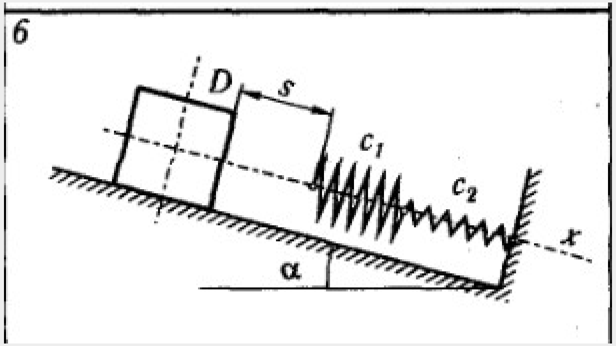
$$\dot{x}_0 = 0$$

Warianty 6 - 10 (rys. 71)

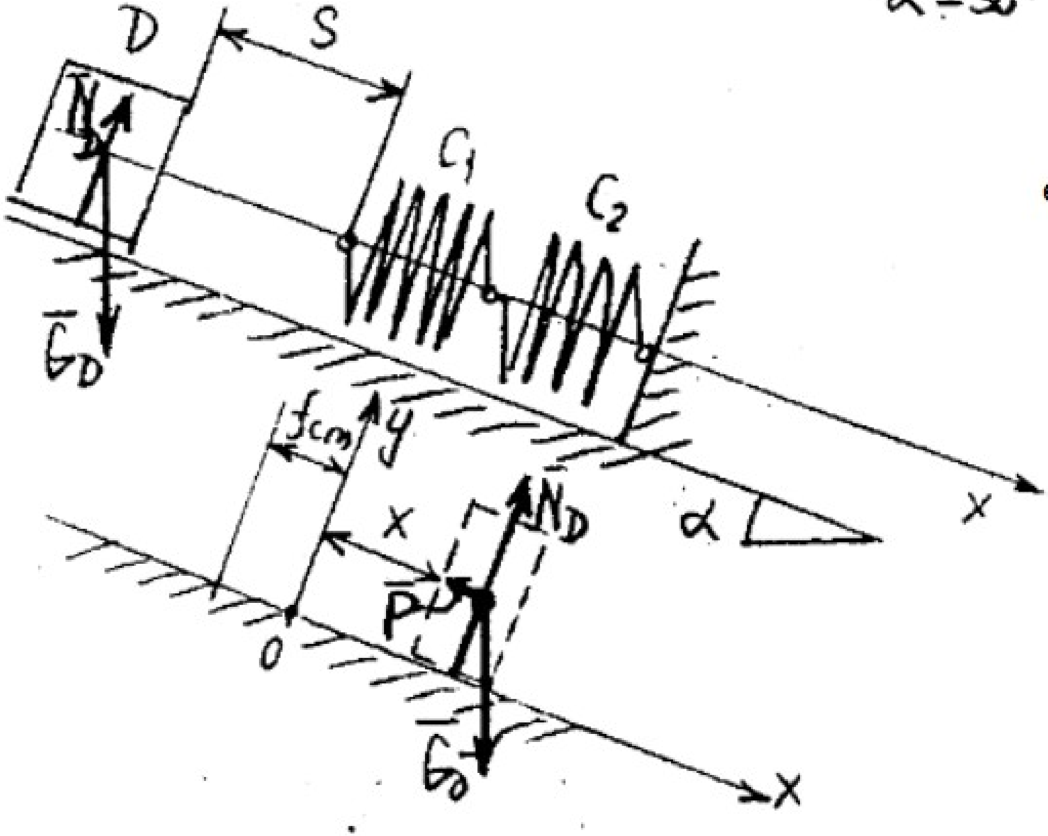
Znaleźć równanie ruchu ciężaru D o masie m po gładkiej płaszczyźnie tworzącej z poziomem kąt α. Zakłada się, że od chwili styku ciężaru ze sprężyną lub podczas dalszego ruchu ciężar nie oddziela się od sprężyn. Ruch ciężaru odnieść do osi x, przyjmując za punkt początkowy położenie ciężaru w stanie spoczynku (przy statycznym ugięciu sprężyn).

W a r i a n t 6

Wykonując ruch bez prędkości początkowej po płaszczyźnie nachylonej do poziomu pod kątem $\alpha = 30°$, ciężar D ($m = 4$ kg) z odległości $s = 0{,}1$ m uderza o nieodkształcone połączone szeregowo sprężyny o sztywnościach $c_1 = 48$ N/cm i $c_2 = 24$ N/cm.



d36



$\alpha = 30^\circ \quad S = 9{,}1\,м \quad m_D = 4\,м \quad C_1 = 48\,\frac{H}{cм} \quad C_2 = 24\,\frac{H}{cм}$

ekwiwalentna sprężyna

$$C = \frac{C_1 \cdot C_2}{(C_1 + C_2)} = \frac{48 \cdot 24}{(48+24)} = 1600\,\frac{H}{M}$$

Prędkośc uderzenia w sprężynę wynika z rówani dynamiki

$$m_D \ddot{x} = \sum X_i$$

$$m_D \ddot{x} = G_D \cdot \sin\alpha$$

$$\ddot{x} = g \cdot \sin\alpha$$

$$\dot{x} = g \cdot \sin\alpha \cdot t + C_1$$

$$x = g \cdot \sin\alpha \cdot \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2$$

Ruch do momentu uderzenia

$$m_b\ddot{x} = \sum \ddot{X}_i$$

$$m_b\ddot{x} = G_b \cdot \sin\alpha$$

$$\ddot{x} = g \cdot \sin\alpha$$

$$\dot{x} = g \cdot \sin\alpha \cdot t + C_1$$

$$x = g \cdot \sin\alpha \cdot \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2$$

Rozwiązanie:

$\underline{t=0}$: $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$: $\Rightarrow$ $C_1 = C_2 = 0$

$x = g \cdot \sin\alpha \frac{t^2}{2}$ równanie ruchu do uderzenia w sprężynę

$\underline{x = S}$: $t_1 = \sqrt{\frac{2S}{g \cdot \sin\alpha}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}1}{9{,}8 \cdot \sin 30^\circ}} = 0{,}202c$

$$V_1 = g \cdot \sin\alpha \cdot t_1 = 9{,}8 \cdot \sin 30^\circ \cdot 0{,}202 = 0{,}99\ м/c$$

Ruch od momentu uderzenia (wspólny)

$$m_D \ddot{X} = \sum^{n} X_i$$
$$m_D \cdot \ddot{X} = G_D \cdot \sin\alpha - P$$
$$P = c\left(f_{cm} + X\right)$$
$$m_D \ddot{X} = m_D g \cdot \sin\alpha - c f_{cm} - cX$$

Siła w sprężynie

Przy równowadze sił

$$m_D g \cdot \sin\alpha = c f_{cm}$$
$$f_{cm} = \frac{m_D \cdot g \cdot \sin\alpha}{c} = \frac{4 \cdot 9{,}8 \cdot \sin 30^\circ}{1600} = 0{,}0123\ \text{м}$$

Statyczna deformacja sprężyny

$$\ddot{x} = -\frac{c}{m_D} x$$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m_D} \cdot x = 0$$

$$x = C_1 \cdot \cos kt + C_2 \sin kt$$

$$k = \sqrt{\frac{c}{m_D}} = \sqrt{\frac{7200}{4}} = 42{,}43 \ 1/c$$

$$x = C_1 \cdot \cos 42{,}43t + C_2 \sin 42{,}43t$$

$$\dot{x} = 42{,}43(-C_1 \sin 42{,}43t + C_2 \cdot \cos 42{,}43t)$$

$\underline{t=0}$: $x_0 = -f_{cm} = -0{,}0123 \text{ м}$ $\dot{x}_0 = V_0 = 0{,}99 \text{ м/с}$

$$C_1 = -0{,}0123 \text{ м} \qquad C_2 = \frac{0{,}99}{42{,}43} = 0{,}0233 \text{ м}$$

$$x = -0{,}0123 \cdot \cos 42{,}43t + 0{,}0233 \cdot \sin 42{,}43t \ (\text{м})$$